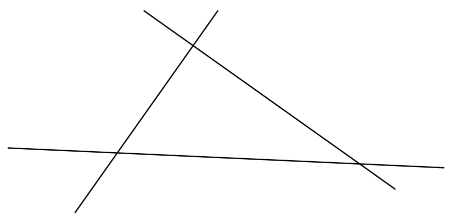
UNIDAD DE APRENDIZAJE II

Saberes procedimentales	Saberes declarativos
1. Emplea de manera sistemática conceptos geométricos y trigonométricos en problemas cotidianos. 2. Utiliza correctamente el lenguaje algebraico, geométrico y trigonométrico. 3. Identifica la simbología propia de la geometría y la trigonometría.	Simbología para representar los elementos de un triángulo. Triánglos y su clasificación. Teoremas generales de los triángulos. Rectas notables del triángulo. Semejanza y congruencia. Teorema de Pitágoras. Razones trigonométricas de triángulos rectángulos. Funciones recíprocas y complementarias. Funciones trigonométricas directas e inversas. Valores de las funciones trigonométricas de ángulos particulares (30°, 45° y 60°). Metodología de resolución de triángulos rectángulos. Aplicaciones de triángulos rectángulos.

A Triángulos

La *Trigonometría* es una rama de la matemática que tiene por objeto el estudio de los triángulos y su ángulos, así como las propiedades de ellos.

Triángulo	Es la porción del plano limitada por tres rectas que se cortan dos a dos. 

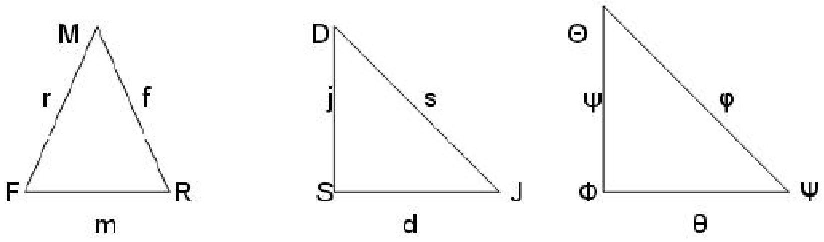
Características

Los elementos que constituyen a un triángulo son:

a) *Vértice,* son los puntos de interseccion de las rectas.
b) *Lados,* son los segmentos de recta determinados por los vértices.
c) *Ángulos interiores,* son formados por los lados.

Un lado de un triángulo es *adyacente* a un ángulo cuando forma del mismo y de lo contrario e *opuesto.*

La identificación de estos elementos se realiza con letras de los distintos alfabetos. Los vértices y ángulos con mayúsculas y los lados co minúsculas correspondiente al vértice opuesto, como se muestra en los siguientes triángulos:



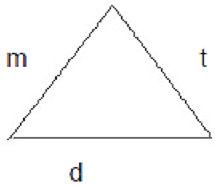
Clasificación de los triángulos

Los triángulos se clasifican atendiendo a la medida de sus lados y a la magnitud de sus ángulos.

1. *<u>En relación a sus lados</u>*

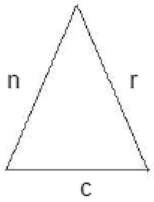
 a) EQUILÁTERO: El que tiene sus tres lados iguales.

$m = t = d$



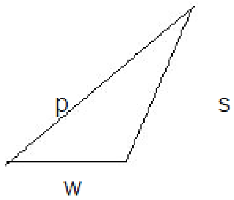
 b) ISÓSCELES: El que tiene dos lados iguales y uno desigual.

$n = r \neq c$



 c) ESCALENO: Cuando sus tres lados son diferentes.

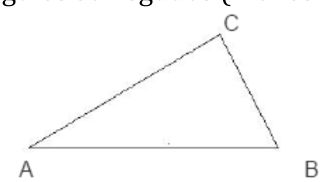
$p \neq s \neq w$



2. *<u>Con relación a la magnitud de sus ángulos:</u>*

 a) ACUTÁNGULO: Si sus tres ángulos son sgudos (menosres de 90°)

$A < 90°,\ B < 90°,\ C < 90°$

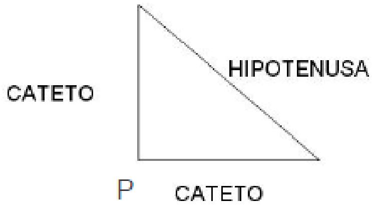


 b) OBTUSÁNGULO: Aquel que tiene un ángulo obtuso (mayor de 90°)

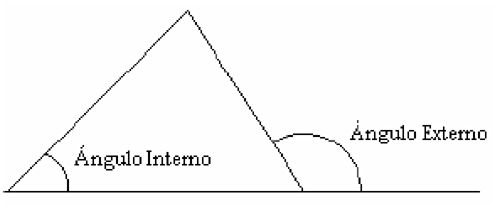
$M > 90°$

c) RECTÁNGULO: Cuando tiene un ángulo recta (de 90°). En este triángulo los lados reciben e nombres especiales, como se observa en la figura:

$P = 90°$



Los catetos que forman ángulos interiores y exteriores. Los interiores se forman con dos lados consecutivos y los exteriores con un lados y la prolongación de otro.



Teoremas Generales

Existen teoremas relacionados con los elementos de los triángulos, algunos de ellos se analizarán a continuación:

A) La suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo es igual a 180°.

Demostración:

$< x =< P$

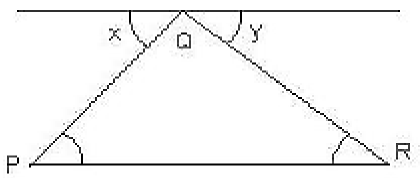
$< y =< R$

$< x + < Q + < y = 180°$

$< x =< P; \quad < y =< R$

Por lo tanto

$< P + Q + < R = 180°$



B) La suma de los ángulos externos de cualquier triángulo es igual a 360°.

Demostración:

$< A + < Q = 180°$

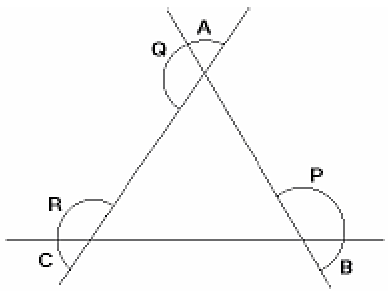
$< C + < R = 180°$

$< P + < B = 180°$

$Pero \quad < A + < B + < C = 180°$

Por lo tanto

$< P + < R + < Q = 360°$



C) En todo triángulo un ángulo exterior es igual a la suma de los dos interiores no adyacentes a él.

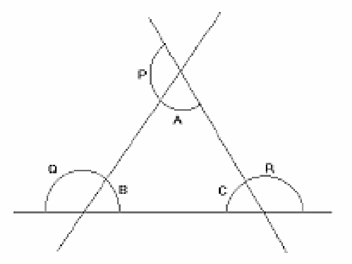
Demostración:

$$< A + < P = 180°$$

$$< A + < B + < C = 180°$$

Así

$$< P = < B + < C$$



D) En todo triángulo, a mayor magnitud de un ángulo, mayor será el valor del lado opuesto.
E) En todo triángulo un lado cualquiera es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.

Ejercicios

1. En un triángulo rectángulo que además es isósceles ¿Cuánto medirá cada ángulo agudo?

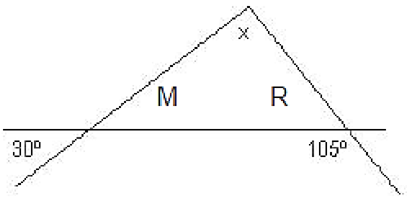
2. De las siguientes medidas ¿con cuáles se podrá trzar un triángulo isósceles?
   a) 5cm, 5cm y 6cm   b) 8cm, 6.5cm y 13.5cm   c) 5cm, 4.5cm y 9cm

3. ¿En cuál de los triángulos las cuatro líneas y puntos notables coiciden? ¿Por qué?

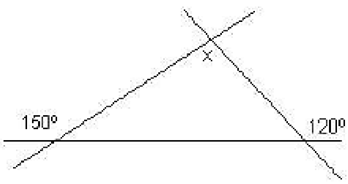
4. Si un triángulo isósceles tiene perímetro de 23m, y uno de sus lados es de 7.4., ¿Cuánto mide el lado desigual?

5. Con los datos que se dan, calcular y justificar el valor del ángulo que se pide:

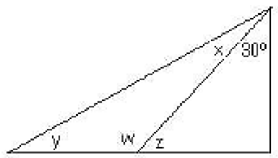
   a) $< x =$



   b) $< x =$



   c) $< (x + y) =$



B Rectas y Puntos Notables del Triángulo

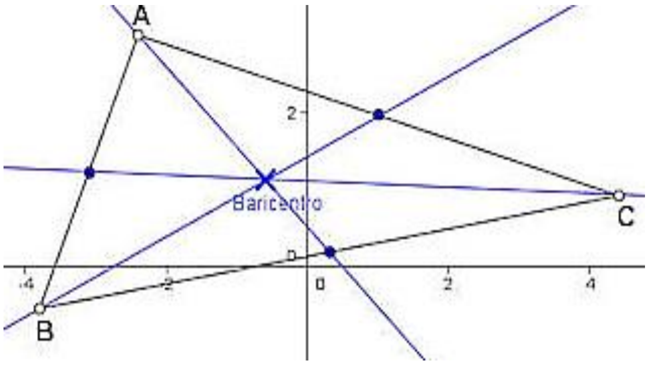
Algunos elementos del triángulo, que por sus características especiales requieren tener un nombre en particular son los siguientes:

A) MEDIANA

Se llama *mediana* a la recta que une un vértice con la mitad del lado opuesto.

En un triángulo ABC, las tres medinas se cruzan en un punto G llamado *BARICENTRO* que es el centro de grabedad del triángulo.

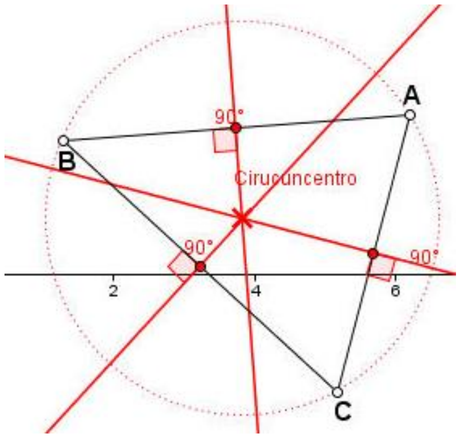
Cada mediana divide al triángulo en dos triángulos de igual área. Además, el Baricentro dista doble del vértice que del punto medio del lado.



B) MEDIATRIZ

La *mediatríz* de un segmento es la recta perpendicular en su punto medio.

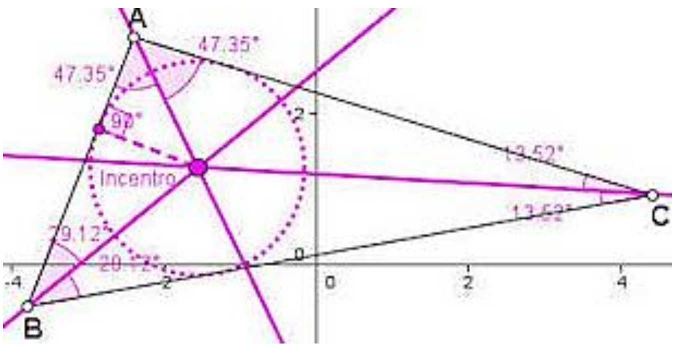
El punto O donde se cortan las tres mediatrices se llama *CIRCUNCENTRO* y equidista, es decir, esta la misma distancia de los tres vértices A, B y C, es por eso que pertenece a las tres mediatrices. La circunferencia que pasa por los tres vértices se llama Circunferencia Circunscrita.



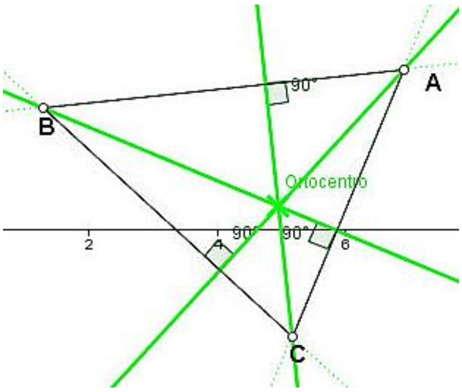
C) BISECTRIZ

Se llama *bisectriz* a la recta que divide un ángulo en dos partes iguales.

El punto I donde se cortan las tres bisectrices interiores se llama *INCENTRO*, equidista de los tres lados y por eso podemos construir una circunferencia de centro I tangente a los lados del triángulo. Dicha circunferencia se le llama *circunferencia inscrita* y es la circunferencia más grande que se puede definir completamente contenida dentro del triángulo.



D) ALTURA



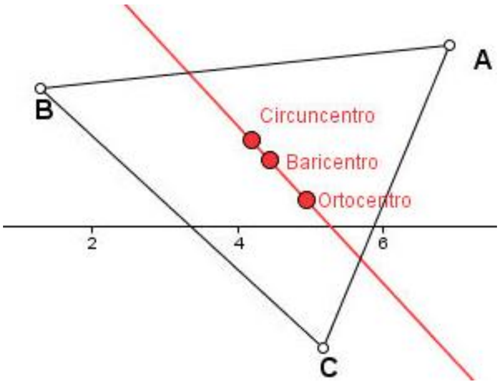
Se llama *altura* en un triángulo a la perpendicular trazada desde un vértice al lado opuesto.

En un triángulo ABC, las alturas se cruzan en un punto llamado *ORTOCENTRO*.

Se puede ver que si trazamos por cada vértice una paralela al lado opuesto se obtiene otro triangulo cuyas mediatrices son justamente las alturas del triángulo primitivo.

E) RECTA DE EULER

El baricentro de un triángulo está alineado con el ortocentro y el circuncentro, y a doble distancia del primero que del segundo. La recta que contiene a estos tres puntos se llama *Recta de Euler*.

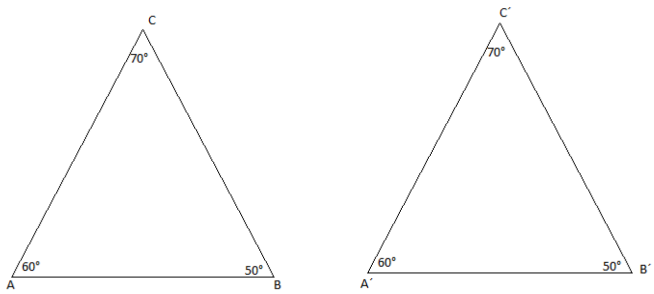


C	Semejanza y Congruencia

Triángulos Congrentes

Los triángulos congruentes son los que tienen igual forma y tamaño. Si dos triángulos son congruentes, sus lados y ángulos correspondientes son iguales.

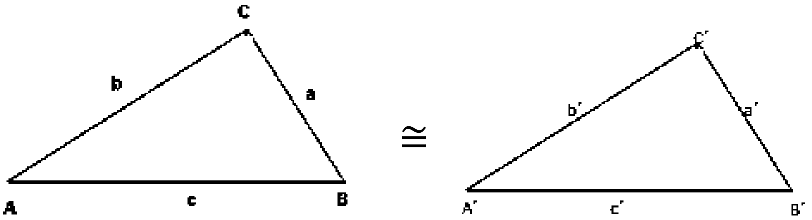
Entonces, según lo dicho, los triángulos congruentes ABC y A´B´C´, tienen iguales sus lados correspondientes (AB=A´B´, BC=B´C´ y AC=A´C´), e iguales sus ángulos correspondientes ($< A =< A´, < B = B´ \;\; y \;\; < C =< C´$).



El simbolismo $\Delta ABC \cong \Delta A´B´C´$ debe leerse: *el triángulo ABC es congruente con el triángulo A prima, B prima, C prima.* Obsérvese cómo pueden localizarse los elementos correspondientes (u homólogos) de los triángulos correspondientes. Los lados correspondientes son los opuestos a ángulos iguales y los ángulos correspondientes son los opuestos a los lados opuestos.

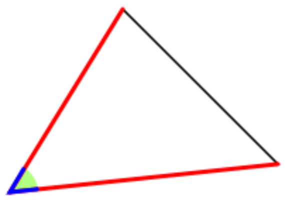
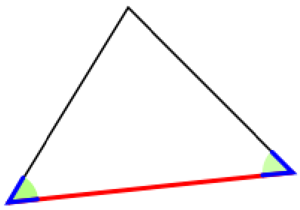
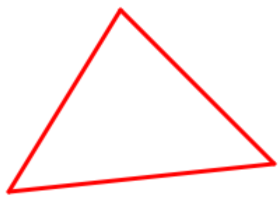
Si dos triángulos son congruentes, sus elementos homólogos son iguales (Homólogo = correspondiente).

De acuerdo con esto, si $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$, $entonces$ $< A \cong < A'$, $< B \cong < B'$, $< C \cong < C'$, $a \cong a'$, $b \cong b'$ y $c \cong c'$.



Los triángulos congruentes se pueden sobreponer, entonces, los ángulos de un triángulo que coiciden con el otro se llaman, como ya hemos dicho, *ángulos homólogos*, y los lados que coiciden serán *homólogos.*

Los principales *casos de congruencia* de triángulos son tres:

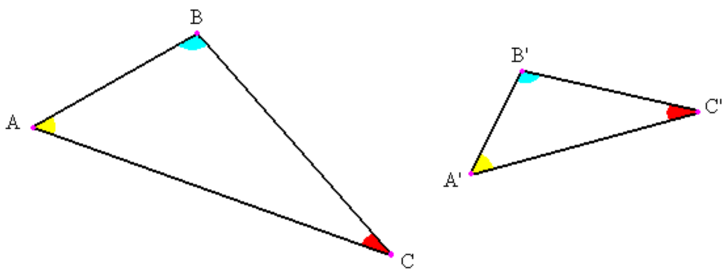
Triángulos	**Postulado de Congruencia**
	**LAL (Lado Ángulo Lado)** Dos triángulos son congruentes si dos lados de uno tiene la misma longitud que los lados del otro triángulo, y los ángulos comprendidos entre esos lados tienen también la misma medida.
	**ALA (Ángulo Lado Ángulo)** Dos triángulos son congruentes si dos ángulos interiores y el lado comprendido entre ellos tienen la misma medida y longitud, respectivamente. (El lado comprendido entre dos ángulos es el lado común a ellos).
	**LLL (Lado Lado Lado)** Dos triángulos son congruentes si cada lado de un triangulo tiene la misma longitud que los correspondientes del otro triángulo.

Semejanza

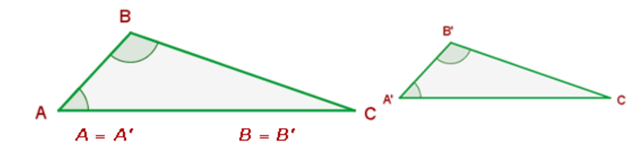
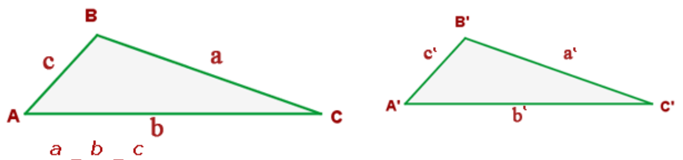
Dos poligonos son <u>*semejantes*</u> cuando tienen idéntica forma pero distinto tamaño. Es decir, cuando son ampliaciones o reducciones unos de otros. Para que tengan la mism forma es necesaio que sus ángulos correspondientes sean congruentes y sus lados, proporcionales.

$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

$$< A = < A'$$
$$< B = < B'$$
$$< C = < C'$$



Para garantizar la semejanza, en la mayoría de los polígonos es necesaio comprobar tanto la igualdad de los ángulos como la proporcionalidad de los lados. Sin embargo, con los triángulos, los criterios de semejanza simplifican la tarea.

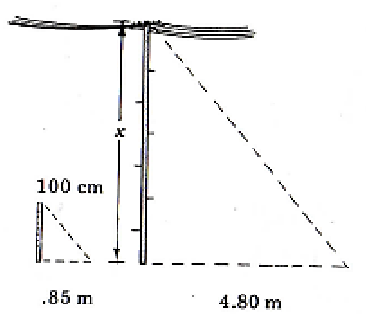
<table>
<tr><th colspan="2">CRITERIOS DE SEMEJANZA</th></tr>
<tr><td>
</td><td>AAA (Ángulo Ángulo Ángulo)
Si los ángulos de un triángulo son congruentes con los del otro, los triángulos son semejantes.</td></tr>
<tr><td>

$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$</td><td>LLL (Lado Lado Lado)
Si los lados de un triángulo son proporcionales con sus correspondientes de otro, los triángulos son semejantes.</td></tr>
<tr><td>

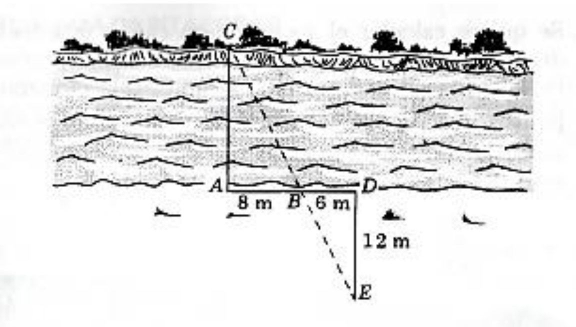
$B = B'$ $\frac{a}{a'} = \frac{c}{c'}$</td><td>LAL (Lado Ángulo Lado)
Si dos lados de un triángulo son proporcionales con los de otro y el ángulo comprendido entre ellos es congruente con su correspondiente, los triángulos son semejantes.</td></tr>
</table>

Ejercicios

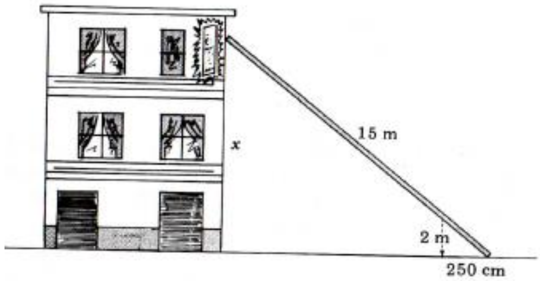
1. Una regla de 1m de largo se coloca verticalmente en el piso y vemos que proyecta una sombra de 85cm de largo. En ese moemtno el poste de la luz proyecta una sombra de 4.80m. calcular la altura del poste.



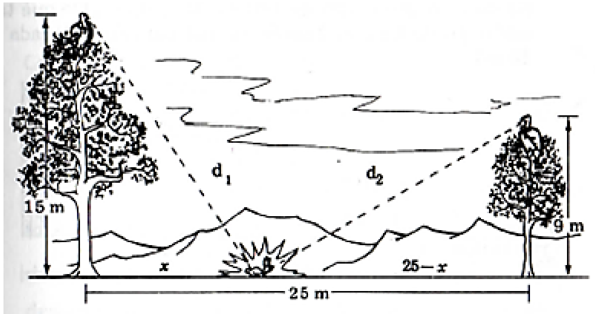
2. Para medir lo ancho AC de un río, un hombre tomó las medidas indicadas en la figura siguiente. AC es perpendicular a AD y BD perpendicular a DE, si AB mide 8m, BD mide 6m, DE mide 12m, calcular la anchura del río.



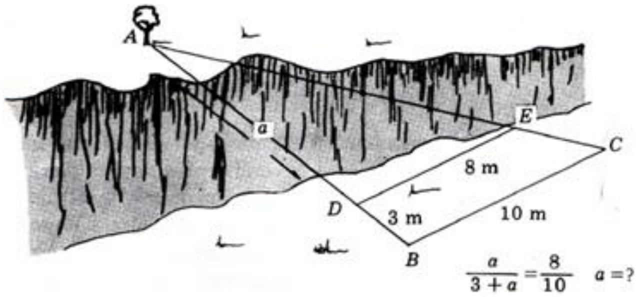
3. Una escalera de 15m de longitud está recargada en un edificio a la altura de un anuncio; una plomada de 2m de largo pende de la escalera y toca el piso a una distancia de 250cm del pie de la escalera. Calcular la altura a que se encuentra el anuncio.



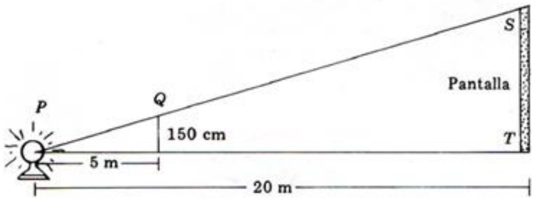
4. Dos buitres acechan a un conejo en su madriguera, parados en dos árboles ue se encuentran a una distancia de 25m uno del otro. El árbol del primer buitre mide 15m de altura, y el del segundo, 9m. al salir el conejo a tomar el sol, ambos buitres se lanzaron sobre él cogiéndola al mismo tiempo entre sus garras. ¿A qué distanci estaba el conejo de ambos buitres?



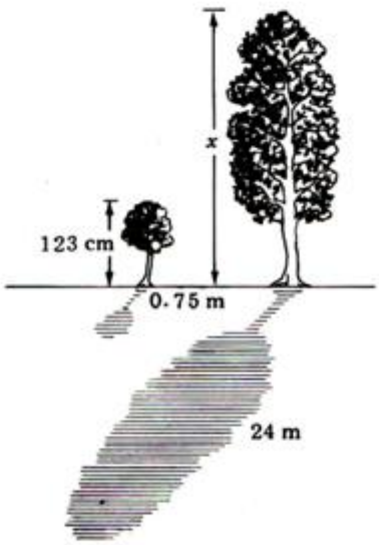
5. Se quere calcular el ancho de un cañón inaccesible, se decide seleccionar un árbol en la otra orilla (punto A), y en la orilla en que nos encontramos seleccionamos dos puntos, B y C, además sobre la línea AB un punto D y sobre la línea AC el punto E, de manera que DE y BC sean paralelas. ¿Cuál es el ancho del cañón?



6. Tenemos una fuente luminosa, colocamos a una distancia de 5m un cuerpo de 150cm de altura. ¿De qué tamaño proyectará su imagen en una pantalla colocada a 20m?



7. La sombra de un arbusto de 123cm de altura es de 0.75m; en ese momento un árbol proyecta una sombra de 24m. ¿Cuál es su altura?



D	Teorema de Pitágoras

En los triángulos rectángulos, además e las propiedades anteriores, se cumple el siguiente teorema:

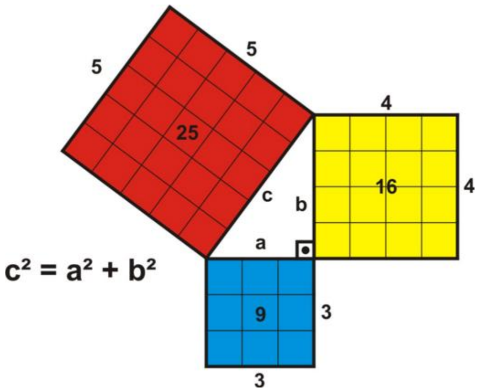
Teorema de Pitágoras	En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos. $c^2 = a^2 + b^2$

Hoy en día hay más de 300 demostraciones conocidas de este teorema. Pitágoras fue alumno de Tales de Mileto, quien es considerado como el creador de la primera demostración:

Sea el triángulo rectángulo ABC, con las longitudes de lado siguientes:

a=3cm b=4cm c=5cm

Gráficamente se representa como:



Área y perímetro del triángulo

Desde los primeros contactos que se tienen en la geometría nos muestran y demuestran que para el cálculo del perímetro y el área del triángulo se utilizan los elementos llamados lados (l), base (b) y altura (h) que se relacionan de la siguiente forma:

$$P = l + l + l = 3l$$
$$A = \frac{bh}{2}$$

Los elementos más fáciles de medir son los lados y existe una forma de relacionarlos con el semiperímetro (s), para calcular el área del triángulo, a ello se le conoce como "*fórmula de Herón*".

$$s = \frac{a+b+c}{2}$$
$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Ejemplo Calcular el área del triángulo cuyos lados miden

a=16cm, b=36cm y c=34cm

$$s = \frac{16 + 36 + 34}{2} = 43cm$$

$$A = \sqrt{43(43-16)(43-36)(43-34)} = \sqrt{73143} = 270.45cm^2$$

Ejercicios

En cada uno de los siguientes casos calcular el valor del área de los triángulos

1. $a = 38cm,\ b = 46cm,\ \ c = 54cm$
2. $a = 68.36m,\ b = 124.4m,\ c = 166.43m$
3. $a = 8.6dm,\ \ b = 95.2dm,\ c = 7.44dm$
4. $a = 48mm,\ \ b = 86mm,\ c = 57mm$
5. $a = 0.346m,\ b = 64cm,\ c = 578mm$

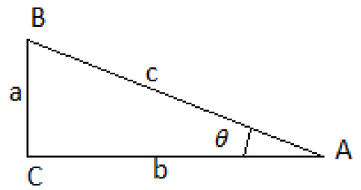
E Razones trigonométricas de triángulos rectángulos

Las funciones trigonométricas de un triángulo rectángulo son las razones o relaciones entre sus lados.

Para poder discutir estas funciones debemos expresar la variable independiente, que puede ser un simple número real o un número real que denote la medida de un ángulo en grados o en radianes, entonces denotaremos, por ejemplo, $sen\, t$ o $sen\, \emptyset$. A esta variable independiente la llamaremos *argumento.*

Funciones trigonométricas de un ángulo agudo

Si consideramos el ángulo θ restringido a $0 \leq \theta \leq 90°$, y tenemos un triángulo rectángulo cualquiera, donde llamamos “c” a la hipotenusa, “a” al cateto opuesto y “b” al cateto adyacente.



Las funciones trigonométricas son (si consideramos el ángulo θ como argumento):

$$sen\theta = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} = \frac{a}{c}$$

$$\cos\theta = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa} = \frac{b}{c}$$

$$\tan\theta = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} = \frac{a}{b}$$

$$\cot\theta = \frac{cateto\ adyacente}{cateto\ opuesto} = \frac{b}{a}$$

$$\sec\theta = \frac{hipotenusa}{cateto\ adyacente} = \frac{c}{b}$$

$$\csc\theta = \frac{hipotenusa}{cateto\ opuesto} = \frac{c}{a}$$

Funciones trigonométricas recíprocas

Dos cantidades son recíprocas cuando su producto es la unidad, por ejemplo:

$$2 \;\; y \;\; \frac{1}{2}, \qquad \frac{3}{8} \;\; y \;\; \frac{8}{3}, \qquad \frac{7}{5} \;\; y \;\; \frac{5}{7}, \qquad \frac{1}{4} \;\; y \;\; 4$$

Si multiplicamos estos racionales, vemos que su producto siempre es l unidad. Luego, las funciones trigonométricas recíprocas son aquellas cuyo producto es la unidad y son:

$$sen\,\theta = \frac{a}{c}$$

$$\cos\theta = \frac{b}{c}$$

$$\tan\theta = \frac{a}{b}$$

$$\cot\theta = \frac{b}{a}$$

$$\sec\theta = \frac{c}{b}$$

$$\csc\theta = \frac{c}{a}$$

El seno y la cosecante, el coseno y la secante, la tangente y la cotangente, como se demuestra en seguida:

$$sen\,\theta * \csc\theta = \left(\frac{a}{c}\right)\left(\frac{c}{a}\right) = \frac{ac}{ac} = 1$$

Despejando obtenemos que:

$$\boxed{\boldsymbol{sen\,\theta = \frac{1}{\csc\theta}}} \quad \text{y} \quad \boxed{\boldsymbol{\csc\theta = \frac{1}{sen\,\theta}}}$$

$$cos\,\theta * \sec\theta = \left(\frac{b}{c}\right)\left(\frac{c}{b}\right) = \frac{bc}{bc} = 1$$

Si despejamos obtenemos:

$$\boxed{\boldsymbol{cos\,\theta = \frac{1}{\sec\theta}}} \quad \text{y} \quad \boxed{\boldsymbol{\sec\theta = \frac{1}{cos\,\theta}}}$$

Lo mismo hacemos con tangente y cotangente

$$tan\,\theta * \cot\theta = \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{ab}{ab} = 1$$

Entonces:

$$\boxed{\boldsymbol{tan\theta = \frac{1}{cot\theta}}} \quad \text{y} \quad \boxed{\boldsymbol{\cot\theta = \frac{1}{tan\theta}}}$$

Funciones trigonométricas complementarias

Dos ángulos son complementarios cuando suman 90°, por ejemplo, 25° + 65° = 90°, 49° + 41° = 90°, 15° + 75° = 90°; 25° y 65° son ángulos complementarios.

En un triángulo rectángulo sus ángulos agudos son complementarios, o sea suman 90°.

El prefijo "co" indica que el *co*seno de un ángulo es el seno de su complemento y viceversa; que la *co*tangente es la tangente de su complemento y que la *co*secante es igual a la secante de su complemento y viceversa.

Así:

$$sen\,30° = \cos 60°$$

$$\sec 15° = \csc 75°$$

$$\tan 35° = \cot 55°$$

Ejercicios

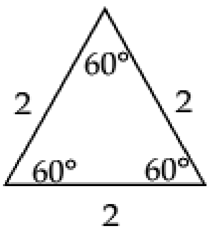
1. Si el seno de un ángulo vale 3/5, ¿Cuánto vale el coseno de su complemento?
2. Si el coseno de un ángulo vale 0.9001, ¿Cuánto vale el seno de su complemento?
3. Si la tangente de un ángulo vale 12.25, ¿Cuánto vale la cotangente de su complemento?
4. Dados los tres lados de un triángulo rectángulo, expresar los valores de las funciones trigonométricas:

Hipotenusa	**Cateto opuesto**	**Cateto adyacente**
5	4	3
25	24	7
$n+1$	$2n$	$n-1$
$a+b$	a^2-b^2	$2ab$
1	0.8	0.6
65	63	16

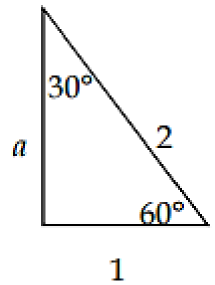
5. Calcular las demás funciones de los ángulos que se indican, si:
   a) $\cot Q = -8/15$
   b) $sen\ D = 13/12$
   c) $\cos\theta = -\frac{5}{13}$
   d) $\tan K = -1$
   e) $\csc B = \frac{37}{12}$
   f) $\tan A = 0.75$
   g) $\cot P = 4^2$

Valores de las funciones trigonométricas de ángulos particulares (30°, 45° y 60°)

En trigonometría plana, es fácil de encontrar el valor exacto de la función seno y coseno de los ángulos de 30°, 45° y 60°, gracias a la ayuda de triángulos rectángulos y el uso de identidades trigonométricas en conjunto con el teorema de Pitágoras. Todo parte de dos triángulos: uno equilátero y el otro isósceles. Si enfocamos nuestra atención al triángulo equilátero, vemos que sus ángulos internos miden 60° (por tratarse de un triángulo equilátero) y suponiendo que sus lados midan, por ejemplo, la cantidad de dos, se tiene:



Este triángulo equilátero puede ser transformado, mediante una línea perpendicular a una de sus bases, en dos triángulos rectángulos. Si tomamos de referencia a sólo un triángulo rectángulo, obtenemos:



Al aplicar el Teorema de Pitágoras, se obtiene que $a=\sqrt{3}$. Entonces las funciones trigonometricas de los ángulos de 30° , 45° y 60° pueden ser calculados. De ahí que se obtengan los siguientes valores:

Funciones de 30°	**Funciones de 45°**	**Funciones de 60°**
$sen\ 30° = \frac{1}{2}$	$sen\ 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$sen\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos 60° = \frac{1}{2}$
$\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\tan 45° = \frac{1}{1} = 1$	$\tan 60° = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$
$\cot 30° = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$	$\cot 45° = \frac{1}{1} = 1$	$\cot 60° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
$\sec 30° = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sec 45° = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$	$\sec 60° = \frac{2}{1} = 2$
$\csc 30° = \frac{2}{1} = 2$	$\csc 45° = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$	$\csc 60° = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

Ejercicios

1. Calcular el cateto b, si a=42.57 y A=40°50´
2. Calcular A, si b=2253.5 y a=475.6
3. Resolver el triángulo rectángulo si:
    a. A=35°10´ y c=74.5
    b. a=25.63 y A=58°30´
    c. b=15.25 y c=32.5
    d. A=38°16´ y a=25.38cm
    e. A=30°40´ y c=56.27cm
    f. a=375 m y b=289m
    g. a=27.7m y c=36.4m
    h. A=48°20´ y a=54.6cm

4. A 87.5 m de la base de una torre el ángulo de elevación a su cúspide es de 37°20´; calcular la altura de la torre, si la altura del aparato con que se midio el ángulo es de 1.50m.

5. Calcular el ángulo de elevación del sol en el momento en que un árbol de 32.5m de altura proyecta una sombra de 75m.

6. ¿Qué altura alcanza sobre un muro una escalera de 5m de largo, si forma con el piso un ángulo de 65°10´?

7. Desde lo alto de un faro de 150 de altura se observa una embarcación a un ángulo de depresión de 23°30´; calcular la distancia del faro a la embarcación.

8. Calcular la longitud del lado de un pentágono regular inscrito en un círculo de diámetro igual a 10cm.

9. Calcuar el perímetro y la superficie de un rectángulo cuya diagonal mide 40cm, sabiendo que el ángulo que forma la diagonal con uno de sus ado es de 36°50´.

10. Los lados de un rectángulo miden 21.9 y 29.2 m, respectivamente. ¿Cuánto mide cada uno de los ángulos que forma la diagonal con los lados del rectángulo?